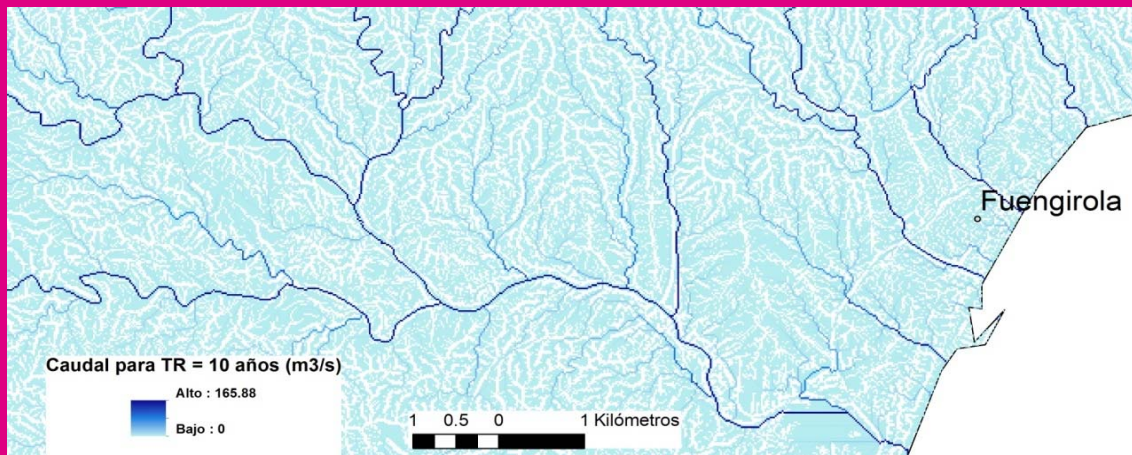


Proyectos de **I+D+i**
2011-2013



Bases Científicas para una Guía Técnica de Drenaje específica para la Red Viaria Andaluza

Universidad de Granada



Agencia de Obra Pública de la Junta de Andalucía
CONSEJERÍA DE FOMENTO Y VIVIENDA



Unión Europea

Fondo Europeo
de Desarrollo Regional



Bases Científicas para una Guía Técnica de Drenaje específica para la Red Viaria Andaluza

© Agencia de Obra Pública de la Junta de Andalucía. Consejería Fomento y Vivienda. Junta de Andalucía. 2012

Universidad de Granada

Equipo de investigación: Leonardo S. Nania Escobar, Fernando Delgado Ramos, Pablo Ortiz Rossini

Granada. 28-11-2014

1. Introducción general y Antecedentes

En la presente memoria se resumen los aspectos más destacados del proyecto “Bases Científicas para una Guía Técnica de Drenaje específica para la Red Viaria Andaluza”.

La necesidad del estudio de bases científicas surge debido a que las administraciones regionales relacionadas con la construcción de infraestructuras viarias (Agencia de Obra Pública, unión de las antiguas Gestión de Infraestructuras de Andalucía S.A.-GIASA- y Ferrocarriles de la Junta de Andalucía) y la de gestión del dominio público hidráulico (Agencia Andaluza del Agua) aplican normativas de carácter estatal para el diseño de obras de drenaje transversal. Dado su carácter amplio, estas normativas pueden no tener en cuenta algunas singularidades regionales y los criterios derivados de éstas pueden dar lugar a diferentes interpretaciones por parte de ambas entidades. El conocimiento científico, por tanto, contribuirá a entender mejor la fenomenología regional para unificar estos criterios y evitar contradicciones y diseños inadecuados por exceso o por defecto.

Las normativas a las que nos referimos, son la Instrucción 5.2-IC “Drenaje Superficial” y la publicación “Máximas lluvias en la España Peninsular” (MAXPLU) para el cálculo de caudales de avenida y tormentas para el cálculo de dichos caudales, respectivamente. En el diseño de estructuras de drenaje trasversal de carreteras o ferrocarriles se pueden diferenciar tres fases:

- Cálculo Hidrológico determinar los caudales de avenida asociados a cada frecuencia
- Diseño Hidráulico para asegurar el correcto funcionamiento
- Cálculo Hidráulico para determinar los calados, velocidades y demás características del flujo, tanto en cauces como en obras de drenaje transversal (ODT)

Por lo que este proyecto se ha desarrollado en estas tres partes. A continuación se describirá en forma resumida los aspectos más destacados de cada una de ellas.

2. Cálculo Hidrológico

2.1 Introducción

Para el diseño de obras que interactúan con cauces naturales, como las obras de drenaje transversal de carreteras y ferrocarriles, el primer paso es la determinación del caudal (volumen de agua por unidad de tiempo) que se espera circule por dicho cauce con una probabilidad determinada. Lo más habitual es utilizar la probabilidad del 0,2% de que sea sobrepasado en cada año, que equivale a un periodo de retorno de 500 años, es decir, que se espera que sea sobrepasado ese caudal 1 vez como promedio cada 500 años teniendo en cuenta un tiempo infinito. Esta determinación puede hacerse analizando datos de caudales instantáneos de un periodo de tiempo grande, en lo posible siempre mayor a 20 años, pero esta determinación sería válida sólo para el punto del cauce de que se tienen datos (en general, muy pocos). Para su determinación en puntos sin datos se puede recurrir a dos alternativas: relacionar los caudales con otras características de la cuenca y de su climatología o bien utilizar modelos matemáticos que representan los procesos hidrológicos desde la precipitación o lluvia hasta su transformación en caudal. La primera alternativa se utilizó para cuencas grandes ($> 450 \text{ km}^2$) y la segunda para el resto.

En la mayoría de los casos entonces será necesario caracterizar las precipitaciones, lo cual se hace comúnmente a través de unas funciones que relacionan su intensidad con su duración y su frecuencia (probabilidad de ocurrencia), también llamadas relaciones o curvas IDF. En general, para duraciones pequeñas se esperan intensidades de lluvia elevadas y viceversa. Además, las intensidades aumentan a medida su frecuencia de ocurrencia. Dado que las inundaciones se producen generalmente por eventos de gran intensidad y corta duración, es un dato crítico el conocer adecuadamente las intensidades máximas esperables para tormentas cortas. Luego, la transformación de lluvia o precipitación a caudal se hace aplicando formulaciones matemáticas que representan los procesos hidrológicos involucrados, las cuales pueden ser más o menos complejas. Entre las menos complejas se encuentra el llamado Método Racional y entre las complejas y deseables, la utilización de modelos basados en Hidrogramas Unitarios. En ambas metodologías es necesario trabajar con características físicas de la cuenca como su área, tipos de suelo (por ej. arenas, arcillas, margas, etc.), usos del suelo (por ej. urbano o residencial, cultivos, bosques, industrial, etc). Esta última característica es cambiante en el tiempo, por lo cual, se hace imprescindible contar con información actualizada para la correcta determinación de los parámetros que nos permiten transformar la lluvia en caudal.

2.2 Objetivos y Resultados

En la parte de cálculo hidrológico, los objetivos propuestos fueron entonces:

1. Estudiar el comportamiento espacio-temporal de la precipitación en las cuencas mediterránea y atlántica andaluzas, con el fin de proponer recomendaciones para la estimación de las tormentas de diseño a usar para el cálculo de caudales de avenidas.
2. Calibrar y validar parámetros hidrológicos para ser utilizados en estudios de cálculos de avenidas en las cuencas andaluzas.
3. Analizar comparativamente diferentes metodologías para el cálculo hidrológico: método racional, modelos agregados, modelos distribuidos. En su caso, recomendar alguna fórmula de cálculo idónea para determinación del caudal de avenida en cuencas pequeñas. Proponer un método simplificado.
4. Definir las tipologías de cuencas en las cuencas mediterránea y atlántica andaluzas (regiones tipo) y establecer los parámetros hidrológicos e hidráulicos más frecuentes en cada una de ellas.
5. Establecer las fuentes alfanuméricas y gráficas a emplear en los estudios hidrológicos - hidráulicos.
6. Elaborar una aplicación sobre SIG para la consulta de los mapas de caudales máximos.

Como resultado del desarrollo de estos objetivos se han obtenido nuevas relaciones IDF para las Demarcaciones Hidrográficas de Cuencas Mediterráneas Andaluzas (CMA), del Guadalete-Barbate (GB) y del Tinto-Odiel-Piedras (TOP). Los datos de partida fueron precipitaciones con duraciones de 5 a 15 minutos como mínimo, de un gran número de estaciones de varias redes, como por ejemplo de la Agencia Estatal de Meteorología, del Sistema Automático de Información Hidrológica de la CMA (SAIH-Hidrosur) y de Cuenca Hidrográfica del Guadalquivir, etc. Esto ha permitido contar con información mucho más detallada que la utilizada en la publicación MAXPLU y con un registro de datos que abarca hasta 2013. Para la obtención de las relaciones IDF se ha recurrido a las más modernas técnicas de análisis de frecuencia regional disponibles.

También se ha realizado un análisis de eventos local con una estación representativa de la costa Tropical de Granada, obteniéndose las funciones estadísticas que mejor se ajustan a las variables separación entre eventos, duración, volumen e intensidad máxima así como sus parámetros asociados, con el fin de que puedan ser utilizados en simulaciones hidrológicas a largo plazo a través de técnicas de Monte Carlo, por ejemplo.

En lo que concierne al estudio de los caudales, se ha obtenido un mapa de caudales máximos que muestra geográficamente los caudales asociados a periodos de retorno de 2, 5, 10, 25, 50, 100, 200 y 500 años, para áreas de cuencas de más de 10 km² y con una resolución de 20x20 m. Para su representación gráfica se ha recurrido a un sistema de información geográfica (SIG) libre y de código abierto (QGIS, <http://www.qgis.org/es/site/>) disponible para las plataformas informáticas más utilizadas. Las capas correspondientes a los diferentes periodos de retorno están incluidas en un único proyecto de QGIS y están en un formato adecuado para ser incorporadas en un futuro a algún visor de ámbito regional o estatal, como por ejemplo, el del Sistema Nacional de Cartografía de Zonas Inundables (SNCZI) que ya tiene incorporados los datos de la mayoría de cuencas hidrográficas intercomunitarias. Cabe destacar que dichos caudales han sido obtenidos tomando como base las lluvias de la publicación MAXPLU y utilizando el Método Racional, por lo que deben considerarse sólo como una primera aproximación y que el uso de esta información no exime de la realización, en su caso, de estudios hidrológicos específicos con metodologías más complejas. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de su aspecto.



Fig. 1: Vista parcial del Mapa de Caudales Máximos.

En la determinación de los caudales por el Método Racional juega un papel muy importante un parámetro llamado umbral de escorrentía (P_0) que viene a ser la cantidad de agua que puede absorber el suelo antes

de generarse caudal en los cauces. En el marco de este proyecto se obtuvo un mapa de este parámetro partiendo de los datos de usos y tipos de suelo más actuales y con la mayor resolución posible, el cual se pone a disposición de los posibles usuarios.

Los caudales calculados utilizando el Método Racional fueron contrastados con los registros de caudales que se tienen en las cuencas de estudio, obteniéndose de este modo unos coeficientes correctores del parámetro P_0 para diferentes regiones que se consideraron de comportamiento homogéneo, los cuales también está a disposición de quien los necesite.

También fueron calculados los caudales en las numerosas cuencas de las que se tienen datos de lluvias y caudales utilizado una metodología basada en el Hidrograma Unitario (software HEC-HMS del U.S. Army Corps of Engineers, de libre distribución), concluyendo que para que la aplicación del Método Racional y el Hidrograma Unitario arrojen resultados iguales, es necesario utilizar coeficientes correctores del P_0 de entre 0,58 y 2,9 (todas las cuencas y todos los eventos considerados), siendo el valor medio obtenido en cuencas de la CMA de 1,49 y del GB de 1,57, por lo cual, un valor de 1,5 se consideró adecuado y fue el que se utilizó para obtener el mapa de caudales máximos.

Para la determinación de caudales en cuencas mayores a 450 km² se utilizó una metodología basada en ecuaciones de regresión múltiple por regiones de comportamiento homogéneo, en las cuales se trabajó con los siguientes parámetros característicos muy fáciles de obtener: el área, la precipitación máxima diaria anual asociada al periodo de retorno considerado y la pendiente media de la cuenca. Los coeficientes de tales ecuaciones están a disposición de los usuarios interesados

Finalmente, dentro de los procesos hidrológicos importantes en una transformación de lluvia a caudal de tipo complejo están los de propagación de caudales en cauces, los cuales cobran relevancia cuando se deben separar las cuencas en subcuencas de características homogéneas. En este sentido se compararon simulaciones hidráulicas en cauces realizadas con diferentes metodologías (modelo hidráulico 2D, modelo hidrológico agregado tipos Muskingum y Muskingum-Cunge y modelo distribuido tipo onda cinemática), llegándose a la conclusión que el modelo agregado tipo Muskingum es el más adecuado, calculando el parámetro K con las formulaciones disponibles actualmente (tiempo de viaje con la fórmula de Témez).

2.3 Aspectos innovadores y Justificación del proyecto

En resumen, entre las innovaciones logradas con esta parte del proyecto se encuentran:

- Determinación de mapas de caudales máximos de las cuencas intracomunitarias de Andalucía como son las Mediterráneas Andaluzas, Guadalete-Barbate y Tinto-Odiel-Piedras. Visor de dichos mapas basado en una aplicación SIG libre y código abierto.
- Mapa de umbral de escorrentía actualizado para las cuencas mencionadas.
- Coeficientes correctores del umbral de escorrentía calibrados para regiones de comportamiento homogéneo dentro de las cuencas mencionadas.
- Relaciones IDF actualizadas y detalladas para las cuencas mencionadas.
- Mapas de volúmenes de precipitación máximos en 24 horas asociados a diferentes periodos de retorno de las cuencas mencionadas. Los mapas para duraciones desde 5 min a 24 horas pueden obtenerse con los parámetros determinados en cada una de las regiones de comportamiento homogéneo.
- Fórmulas para el cálculo de caudales en cuencas grandes basadas en técnicas de regresión múltiple por regiones de comportamiento homogéneo.
- Comparación de metodologías de cálculo sencillas (Método Racional) con otra más compleja (Hidrograma Unitario) y conclusiones relacionadas.
- Comparación de distintas metodologías de propagación de caudales y sus conclusiones.

3. Diseño Hidráulico

3.1 Introducción

Las obras de drenaje transversal (ODT) constituyen una parte esencial de cualquier infraestructura viaria, si bien no siempre se les ha dado la importancia que merecen. Un fallo o mal funcionamiento en las obras de drenaje transversal puede afectar no sólo a la obra en sí, sino generar graves problemas en la vía y su entorno, tales como inundaciones, daños en calzada, interrupción del tráfico e incluso accidentes muy graves. Por otra parte, al situarse sobre cauces, un mal diseño puede provocar la degradación del dominio público hidráulico.

3.2 Objetivos y Resultados

Los objetivos de la parte de Diseño Hidráulico eran tres:

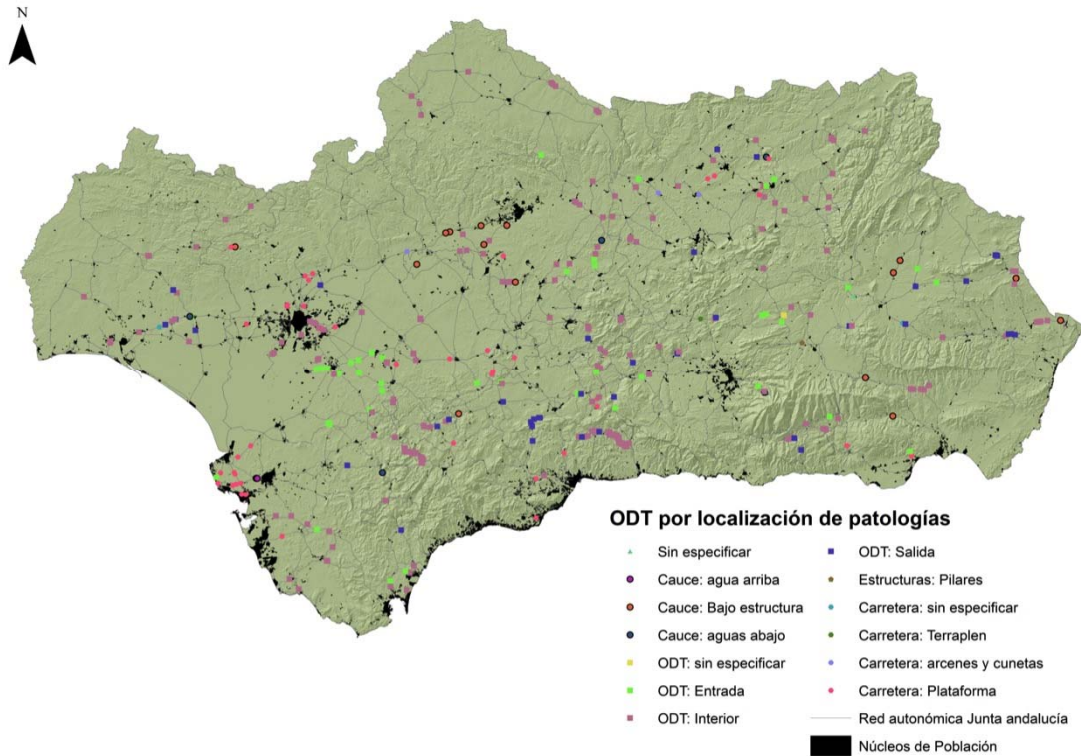
1. Analizar patologías de obras de drenaje transversal en la red viaria andaluza que presenten distintos tipos de fallo hidráulico, para identificar las causas y contrastar la validez de los métodos de diseño empleados
2. Definir y valorar comparativamente obras de drenaje a emplear en función de caudales circulantes, de la sección del dominio público hidráulico y de la protección del medio ambiente
3. Particularizar los criterios de diseño de la Instrucción 5.2-IC para el caso de las cuencas mediterránea y atlántica andaluzas

Para ello se realizó en primer lugar una profunda revisión del estado del arte y se procedió a definir la metodología del estudio, presentando la correspondiente propuesta y siendo aprobada por la AOPJA. A continuación se mantuvieron reuniones en cada una de las provincias andaluzas con los/as responsables de las áreas de conservación de carreteras y se recabó de ellos/as toda la información disponible sobre problemas o patologías en las obras de drenaje transversal.

Para cada provincia se ha llevado a cabo un estudio detallado de dichas patologías teniendo en cuenta múltiples variables como tipo de vía, tipo de ODT, ubicación de la patología, tipo de patología, posible diagnóstico, etc.

A continuación se hizo un profundo análisis de frecuencias de cada una de esas patologías, tanto a nivel provincial como regional.

Así por ejemplo en la figura siguiente se muestra la distribución de obras de drenaje transversal que han sufrido patologías, clasificadas según la localización de dicha patología:



Como conclusiones más destacadas se puede señalar que algo más de la mitad (50,12%) de las carreteras de la red autonómica andaluza han sufrido patologías relevantes en sus obras de drenaje transversal (ODT), este porcentaje es diferente en cuanto al nivel provincial, oscilando entre unos valores del 20-60%.

El material más usado en las obras de drenaje con patologías relevantes es el hormigón armado, (63%), seguido del acero corrugado (29%), no obstante la influencia del acero corrugado en las patologías asociadas a este tipo de material es más importante. Aparecen también materiales como mampostería y ladrillo, que generalmente se encuentran en las carreteras heredadas de las diputaciones.

La forma predominante es el tubo circular (65%), seguido del marco rectangular (14%). A nivel de provincias esta afirmación se mantiene constante.

En cada una de las provincias la mayor parte de las patologías se encuentran dentro del cuerpo de la ODT (76%), seguidas de las patologías situadas en la plataforma de la carretera (19%). Dentro del cuerpo de la ODT predominan las que se encuentran en el interior de la ODT (71%).

En cuanto al tipo de patologías nos encontramos una clasificación más heterogénea, destacan: la acumulación de sedimentos, con un 26%, la rotura por daño estructural, 22%, elevación del nivel de agua por encima de lo previsto, 10%, y erosión e introducción de agua en la plataforma, con un 7%.

La distribución por patologías de las provincias es muy similar al nivel andaluz, a excepción de la provincia de Málaga, que presenta un alto porcentaje de rotura por daño estructural, (66%), al disponer de una gran cantidad de datos de ODT de acero corrugado.

El diagnóstico se distribuye de la siguiente forma: el 59% de la patologías se atribuye al funcionamiento de la ODT, el 25 % a las condiciones del cauce receptor; mientras que el resto de los porcentajes se distribuye entre fallo de otros elementos de la carretera (5%) la construcción de la ODT (4%), diseño de estructuras (4%) y otros 3%. Dentro del diagnóstico más frecuente, problemas en el funcionamiento de la

ODT, los mayores porcentajes están causados por daño estructural del acero corrugado (28,07%), caudal sólido superior a la capacidad de la ODT (24,36%) y caudal sólido/líquido superior a la capacidad de la ODT (24,07%).

Conseguida toda esta importante información, se ha continuado con el tercero de los objetivos de la parte de Diseño Hidráulico y para ello se han estudiado en profundidad, no sólo la Instrucción 5.2-IC vigente y su nuevo borrador, sino de otras comunidades autónomas y de otros países, así como las normas y recomendaciones de la propia administración autonómica andaluza.

Con todo ello se ha podido finalmente elaborar una propuesta de prescripciones para el diseño de obras de drenaje transversal según el tipo de cauce que tiene en cuenta el riesgo de inundación, los riesgos de erosión/sedimentación/obstrucción y los riesgos de deterioro del dominio público hidráulico y del espacio fluvial.

3.3 Aspectos innovadores y Justificación del proyecto

Se ha conseguido dotar a la administración andaluza de una información exhaustiva y bien estructurada, utilizando herramientas innovadoras como las bases de datos relacionales y los sistemas de información geográfica.

También se ha elaborado una metodología y las herramientas necesarias para que en las primeras fases de diseño de una infraestructura viaria se pueda ya tener en cuenta su posible incidencia sobre el dominio público hidráulico de cara a poder elegir la alternativa más adecuada.

Finalmente se han sentado las bases para adoptar prescripciones para el diseño de obras de paso de cauces con una concepción holística muy avanzada que situará a nuestra comunidad a la cabeza en cuanto a los criterios de viabilidad y sostenibilidad empleados.

4. Cálculo Hidráulico

4.1 Introducción

Se describen en forma resumida las tareas realizadas y resultados obtenidos en la parte de “Cálculo Hidráulico”.

La Instrucción 5.2-IC “Drenaje Superficial” es utilizada de forma habitual no sólo en la red estatal de carreteras, sino también en redes viarias de distintas Autonomías y Diputaciones Provinciales. Esta instrucción no ofrece detalles acerca del cálculo hidráulico necesario cuando las obras a tratar son singulares o de considerable importancia, en particular cuando modifican sustancialmente los flujos en cauces. Por ello, se desarrolla un modelo numérico de hidrodinámica y transporte de sedimentos como una herramienta de utilidad para la introducción adicional de consideraciones y bases científicas, así como a su posible uso en proyectos y cálculo. Esta base complementa la descripción de técnicas y cálculos hidráulicos establecidos que son, normalmente, suficientes en obras de menor envergadura.

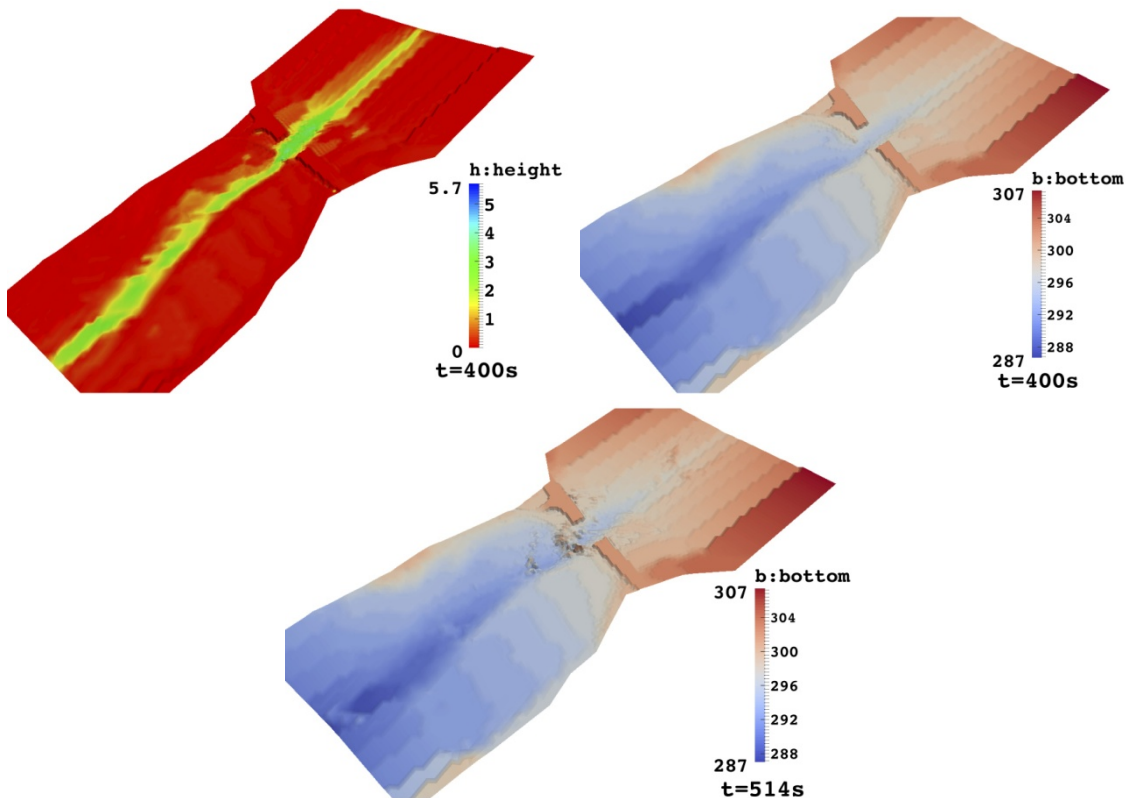
4.2 Objetivos y Resultados

Los objetivos en forma resumida han sido: 1) el desarrollo de un modelo bidimensional de flujo en ríos para su aplicación en proyectos y estudios relacionados con la red viaria de Andalucía; 2) aplicación del modelo en casos piloto en el ámbito de las cuencas mediterránea y atlántica andaluzas, incluyendo comparativas con modelos unidimensionales como ayuda para determinar criterios de selección de modelos numéricos aplicados a ODT; 3) desarrollo de un modelo acoplado de transporte de sólidos y su aplicación tanto a experimentos para su validación como a casos reales.

Los trabajos desarrollados con el fin de conseguir el primer y el último objetivo se traducen en una metodología de cálculo que incluye tres fases principales: gestión de datos y preproceso, cálculo, y posproceso-validación, fases habituales en cualquier modelo numérico avanzado. La primera fase consta de un código libre de generación de malla (Salome) y códigos desarrollados en el proyecto. Esta fase permite diseñar una malla de elementos finitos a partir de la topografía y batimetría de la zona a estudiar, así como definir las condiciones de frontera del problema y definir en forma “amistosa” al usuario los datos de entrada al cálculo hidrodinámico y de transporte. La segunda fase, de cálculo, es realizada por un código en elementos finitos que integra las ecuaciones del movimiento. Este modelo ha sido desarrollado en los últimos años por investigadores del proyecto y se ha adaptado en todos los módulos necesarios a los problemas específicos de este proyecto. Este código es también complementado por un módulo de transporte de sedimentos desarrollado durante el proyecto. La tercera etapa consta de un programa de posproceso libre (ParaView). El código de cálculo ha sido modificado para que los resultados puedan ser visualizados y analizados por ParaView directamente. En consecuencia, todo el software es de libre disposición para su uso tanto por los investigadores como por miembros de las Instituciones que intervienen o técnicos interesados.

La aplicación del modelo a casos piloto ha estado centrada en tres tipologías diferentes de problema. El primer experimento ha consistido en un cauce híbrido con datos aportados por un tramo del Río Fahala. Este estudio ha servido entre otros aspectos para comparar el modelo bi-dimensional con los resultados del modelo HEC-RAS unidimensional. El segundo problema tipo ha sido un tramo de cauce situado en Huércal-Overa, donde se ha estudiado la interacción de terraplenes de dos carreteras con el flujo y con el acarreo sólido. En la figura se ilustran resultados de elevaciones de agua, batimetría inicial y final (luego de la crecida). En la figura pueden apreciarse dos terraplenes (obra nueva y antigua) y la considerable influencia de su topología en el depósito y consecuente modificación de flujos e inundación. El tercer problema destacado ha sido el análisis de flujos en una obra de tipo cajón, para el cual se han estudiado diferentes configuraciones de pendientes y orientaciones. En este caso se ha puesto en evidencia que con

frecuencia los cálculos de caudales transportados por métodos simplificados basados en regímenes uniformes no están del lado de la seguridad.



4.3 Aspectos innovadores y Justificación del proyecto

Los métodos avanzados de cálculo, basados en este trabajo en el método de elementos finitos, han ido ocupando en los últimos años el espacio de métodos simplificados en el proyecto y diseño en Ingeniería. En el campo de este proyecto, se contribuye a facilitar su uso en cálculo y diseño hidráulico de obras de drenaje de modelos complejos, mediante un procedimiento adaptado al usuario con interfaces sencillas, aún asumiendo que el uso de modelos hidrodinámicos de forma consistente requiere de un entrenamiento con una curva de aprendizaje lenta. Se ha pretendido así que el tiempo de entrenamiento se reduzca considerablemente. Desde el punto de vista científico, la mayor novedad en este trabajo es el desarrollo de un modelo avanzado que incluye la interacción entre flujos en regiones secas o inundadas con fondos erosionables y no-erosionables. Esta última posibilidad permite la aplicación del algoritmo a un amplio espectro de combinaciones entre estructuras viarias y urbanas y cauces y fondos erosionables para el estudio, a diferentes escalas, de erosión y depósito en situaciones de crecidas y flujos severos. La importancia de esta capacidad de cálculo se apoya en que, tal como se observa en muchos casos reales, el transporte sólido produce daños tan considerables o mayores que la propia inundación, así como induce la modificación sustancial de los flujos. Por otra parte, pueden estudiarse regiones con grandes superficies debido a que el modelo es integrado en profundidad y, por lo tanto, bidimensional. Como fases de desarrollo futuro cabe destacar la necesidad de ampliar los modelos de transporte sólido desarrollados a modelos ad-hoc para cuencas de los ríos de la región.

the \mathbb{R}^n -valued function \mathbf{f} is a solution of the system of differential equations

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{f}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{c}, \quad (1)$$

where $\mathbf{A}(t)$ is an $n \times n$ matrix-valued function, $\mathbf{b}(t)$ is an n -vector-valued function, and \mathbf{c} is an n -vector.

Let $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ be n linearly independent solutions of the homogeneous system

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Let \mathbf{f}_0 be a particular solution of the inhomogeneous system (1). Then the general solution of (1) is

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0(t) + c_1\mathbf{f}_1(t) + c_2\mathbf{f}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{f}_n(t), \quad (3)$$

where c_1, c_2, \dots, c_n are arbitrary constants. The matrix

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t)] \quad (4)$$

is called the fundamental matrix of the homogeneous system (2). The matrix

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t) \ \mathbf{f}_0(t)] \quad (5)$$

is called the fundamental matrix of the inhomogeneous system (1). The matrix

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t) \ \mathbf{f}_0(t) \ \mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t)] \quad (6)$$

is called the fundamental matrix of the system (1). The matrix

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t) \ \mathbf{f}_0(t) \ \mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t)] \quad (7)$$

is called the fundamental matrix of the system (1). The matrix

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t) \ \mathbf{f}_0(t) \ \mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t)] \quad (8)$$

is called the fundamental matrix of the system (1). The matrix

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t) \ \mathbf{f}_0(t) \ \mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \ \dots \ \mathbf{f}_n(t)] \quad (9)$$